PROFISSÃO POLICIAL

Estatística

Professor Rodolfo Schmit

Estatística
Professor Rodolfo Schmit

Sumário

TEORIA DA PROBABILIDADE

1 INTRODUÇÃO E CONCEITOS

A teoria da probabilidade trabalha com a aplicação da intuição humana para estudar quaisquer fenômenos de interesse. O ser humano, com objetivo de compreender os eventos que ocorrem ao seu redor, utiliza o princípio básico da **experimentação**.

Dessa forma, observa-se os possíveis resultados que um fenômeno pode apresentar, a partir de simulações da realidade, e tenta quantificar as chances que cada resultado tem de ocorrer. Basicamente, é uma teoria criada a partir da prática, isto é, a partir de observações, estimam-se as possibilidades.

1.1 Experimento

O experimento é o meio pelo qual o homem simula e observa os possíveis resultados de um determinado fenômeno. O resultado de um experimento é um estado final de acontecimentos que não são previsíveis. De modo geral, os experimentos podem ser determinísticos ou aleatórios.

1.1.1 Experimentos Determinísticos (não casuais)

São experimentos que geram **resultados constantes**, sem variação e não aleatórios. O resultado desse tipo de experimento, sempre que realizado e repetido nas mesmas circunstâncias, é um evento determinado sem possibilidades de obter outro resultado. Por exemplo, reduzir a temperatura da água abaixo de 0º graus Celsius, em condições normais de pressão, acarretará o congelamento da água. Outro exemplo, são reações químicas conhecidas na química, entre outros.

1.1.2 Experimentos Aleatórios (casuais)

São experimentos que, mesmo repetido diversas vezes, sob as mesmas circunstâncias, apresentam resultados diferentes.

Para esse tipo de experimento, aplica-se o conhecimento da **probabilidade**, isto é, se os resultados são aleatórios, cabe quantificar as possibilidades que cada resultado tem de ocorrer.

Exemplos básicos de experimentos aleatórios:

- Lançar um dado e observar o resultado da face virada para cima;
- Lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas;
- Selecionar uma carta de um baralho de 52 cartas e observar o número.

Nos fenômenos provenientes de experimentos aleatórios, é interessante quantificar as probabilidades (as chances) que cada resultado possui dentro de todos os possíveis. Para isso, é necessário compreender dois conceitos fundamentais: o espaço amostral e o evento.

1.2 Espaço Amostral (Ω)

Nos fenômenos que apresentam resultados aleatórios, é interessante quantificar as probabilidades – chances ou possibilidades – que cada resultado possui dentro de todos os possíveis. Para isso, é necessário compreender dois conceitos fundamentais: o espaço amostral e o evento.

Exemplos de como determinar o espaço amostral (Ω) e o respectivo número de elementos [n(Ω)] em Experimentos Aleatórios:

- Lançar um dado de seis faces, numerado de 1 a 6, e observar a face de cima:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$n(\Omega) = 6$$

- Lançar duas moedas e observar as faces de cima:

$$\Omega = \{(Cara, Cara);\ (Cara, Coroa);\ (Coroa, Cara);\ (Coroa, Coroa)\}$$
$$n(\Omega) = 4$$

- Sortear em uma urna um número de 1 a 9:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$n(\Omega) = 9$$

1.3 Evento

Um evento é um **subconjunto** do espaço amostral. É qualquer resultado ou conjunto de resultados, relacionado ao fenômeno em estudo, que se pretende compreender suas possibilidades de ocorrer. Para determiná-lo, é necessário compreender os resultados de interesse, em cada situação.

- **Exemplo 01:**

Experimento Aleatório: lançar um dado e observar a face para cima.

Espaço Amostral:

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}$$
$$\boldsymbol{n(\Omega) = 6}$$

Evento X: obter um resultado par no lançamento do dado.

O conjunto de resultados do evento X será:

$$\boldsymbol{X = \{2, 4, 6\}}$$
$$\boldsymbol{n(X) = 3}$$

Se o resultado do lançamento do dado pertencer ao conjunto X, haverá a ocorrência do evento X.

Outros eventos podem ser determinados no mesmo experimento de lançar o dado, como o evento Y a seguir.

Evento Y: obter um múltiplo de 3 no lançamento do dado.

O conjunto do evento Y será:

$$\boldsymbol{Y = \{2, 4, 6\}}$$
$$\boldsymbol{n(Y) = 2}$$

➢ **Exemplo 02:**

Experimento Aleatório: resultado de um jogo em uma partida de futebol.

Espaço Amostral:

$$\Omega = \{Vitória, Empate, Derrota\}$$
$$n(\Omega) = 3$$

Evento A: obter uma vitória no jogo.

O conjunto do evento A será:

$$A = \{Vitória\}$$
$$n(A) = 1$$

Evento B: não obter uma derrota no jogo.

O conjunto do evento B será:

$$B = \{Vitória, Empate\}$$
$$n(B) = 1$$

1.4 Cálculo de Probabilidade

Para efetuar o cálculo da probabilidade, deve-se primeiramente identificar e compreender o fenômeno em estudo, na sua escala ampla. Após isso, é necessário mapear todos os resultados do experimento aleatório e determinar o espaço amostral e o evento de interesse.

O cálculo da probabilidade P(X) da ocorrência de um evento X consiste no número de possibilidades que esse evento pode assumir sobre o número de todos os resultados possíveis. Assim, é possível representar da seguinte forma:

$$P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{N^{\underline{o}}\ de\ resultados\ favoráveis\ ao\ evento\ X}{N^{\underline{o}}\ de\ resultados\ possíveis}$$

$$P(X) = \frac{Evento}{Espaço\ Amostral}$$

Essa é a fórmula básica da probabilidade, contudo, ela é somente aplicável quando cada resultado do espaço amostral tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Por exemplo, podemos aplicar a fórmula acima em um experimento que consiste no lançamento de uma moeda "honesta" (não viciada), pois as faces cara e coroa têm a mesma probabilidade de sorteio. No entanto, não podemos aplicar em um experimento de lançamento de uma moeda "não honesta" (viciada), pois a probabilidade de sorteio de uma das faces é maior do que a da outra.

A notação "P(X)" indica a probabilidade de ocorrer o evento X. Sempre nas notações matemáticas de probabilidade, o que estiver dentro dos parênteses representa o evento de interesse ao qual se deseja obter o valor de probabilidade da sua ocorrência.

Com esse conhecimento, é interessante estabelecer um padrão toda vez que for realizar uma questão de probabilidade. Esse tipo de conteúdo depende muito da interpretação do aluno em cada caso abordado nas questões.

Para isso, a forma como as informações devem ser buscadas e interpretadas pode ser vantajosa seguindo a seguinte sequência lógica:

1º Passo → Identificar o experimento aleatório e compreender qual fenômeno ele pretende obter informações, definindo assim o número de elementos do espaço amostral n(Ω), isto é, o número de resultados possíveis;

2º Passo → Identificar o evento de interesse, ou seja, dentro dos resultados possíveis quais são aqueles que a questão tem o objetivo de quantificar. Com isso, define-se o seu respectivo número de elementos n(X), isto é, o número de resultados favoráveis (ou de interesse);

3º Passo → Aplicar a fórmula da Probabilidade: $P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)}$;

Muitas vezes, para contagem do número de elementos do espaço amostral e do evento, será necessário fazer uso do princípio fundamental da contagem, como também, utilizar os recursos matemáticos da combinação, permutação e do arranjo, conforme cada questão. O aluno precisa ter domínio desses conhecimentos da matemática para não precisar fazer contagem extensas e quase impraticáveis em uma questão de concurso.

Vamos utilizar exemplo para aplicar a fórmula da probabilidade:

- **Experimento Aleatório:** lançar um dado e observar a face para cima.

Espaço Amostral:

$$\boldsymbol{\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$$
$$\boldsymbol{n(\Omega) = 6}$$

Evento X: obter um resultado par no lançamento do dado.

$$X = \{2, 4, 6\}$$
$$n(X) = 3$$

Probabilidade do Evento X:

$$P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- **Experimento Aleatório:** resultado de um jogo em uma partida de futebol.

Espaço Amostral:

$$\Omega = \{Vitória, Empate, Derrota\}$$
$$n(\Omega) = 3$$

Evento A: obter uma vitória no jogo.

$$A = \{Vitória\}$$
$$n(A) = 1$$

Probabilidade do Evento A:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{3}$$

Evento B: não obter uma derrota no jogo.

$$B = \{Vitória, Empate\}$$
$$n(B) = 1$$

Probabilidade do Evento B:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{3}$$

2 AXIOMAS DA PROBABILIDADE

Os axiomas da probabilidade são propriedades básicas estabelecidas na teoria clássica da probabilidade que devem ser obedecidas de maneira absoluta. Em outras palavras, toda informação aplicada ao conteúdo de probabilidade obedece aos axiomas e podem ser utilizados para solucionar diversas questões de Estatística. São três os principais axiomas da probabilidade.

2.1 1º AXIOMA

Os valores que a probabilidade de um evento X qualquer pode assumir varia de 0 (ou 0%) até 1 (ou 100%).

$$0 \leq P(X) \leq 1$$

Com a probabilidade nula [P(X) = 0] ocorre um **evento impossível**, isto é, o evento é um resultado que não pertence ao espaço amostral. Por exemplo, a probabilidade de jogar um dado de seis faces, numerado de 1 a 6, e obter o número 9. Veja que, para esse exemplo, o evento não é um resultado possível de ocorrer nesse experimento aleatório.

Já para situação de valor máximo, com P(X) = 1, ocorre um **evento certo**, isto é, o evento é um resultado que engloba todo o espaço amostral. Por exemplo, a probabilidade de jogar um dado de seis faces, numerado de 1 a 6, e obter um resultado menor que 7. Todos os resultados possíveis estão contemplados no evento de interesse, desse modo, para esse experimento aleatório, é certo que irá ocorrer o evento.

2.2 2º Axioma

A soma das probabilidades de cada elemento que compõe o espaço amostral é igual a 1. Em outras definições, o espaço amostral contém todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, assim, é possível concluir que se trata de um evento certo. Dessa forma:

$$\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$$

A partir desse axioma, é possível obter deduções bem interessantes para resolução de questões de probabilidade. No exemplo do experimento de um lançamento de um dado de seis faces, é possível chegar à seguinte conclusão:

$$\boldsymbol{P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1}$$

Dessa forma, a soma da probabilidade de cada resultado possível será 100% das possibilidades de um experimento aleatório.

Nesse exemplo em questão, a soma da probabilidade de obter qualquer uma das seis faces de um dado será 1.

2.3 3º Axioma

A probabilidade de ocorrência de um evento X somada com a probabilidade de não ocorrência desse mesmo evento é igual a 1.

$$P(X\ ocorrer) + P(X\ não\ ocorrer) = 1$$

A relação de probabilidade entre um evento "X ocorrer" e "X não ocorrer" é de complementariedade. Dessa forma, são denominados de eventos complementares. Portanto, um evento complementar são os resultados possíveis que faltam para completar 100% das possibilidades e, assim, a soma do evento de interesse e o evento complementar é 1.

O complementar de um evento X, pode ser representado por ~X, ¬X ou X^C. Assim:

$$P(X) + P(X^C) = 1$$

Exemplos de eventos complementares:

- **P(ganhar o jogo) + P(não ganhar o jogo) = 1;**
- **P(acertar alvo) + P(não acertar o alvo) = 1;**
- **P(cara) + P(coroa) = 1;**
- **P(obter par no dado) + P(obter ímpar no dado) = 1;**
- **P(mínimo de 3 pessoas) + P(máximo de 2 pessoas) = 1;**
- **P(nascer pelo menos 1 menina) + P(nascer nenhuma menina) = 1.**

3 INTERAÇÃO DE EVENTOS DE PORBABILIDADE

Após compreender as definições básicas sobre a teoria da probabilidade, é interessante entender que cada evento de probabilidade pode ter uma interação com outro evento.

Portanto, quando for de interesse obter a **probabilidade de dois ou mais eventos** de probabilidade é preciso conhecer a interação entre esses eventos. Isto é, deve-se saber se a ocorrência de um evento X modifica a probabilidade de um outro evento Y ocorrer, e como esses dois eventos podem ocorrer conjuntamente. As principais formas de interação que o aluno precisa compreender são:

Interação de Eventos

- Eventos Dependentes
- Eventos Independentes
- Eventos Mutuamente Exclusivos
- Eventos Contidos
- Eventos Coincidentes

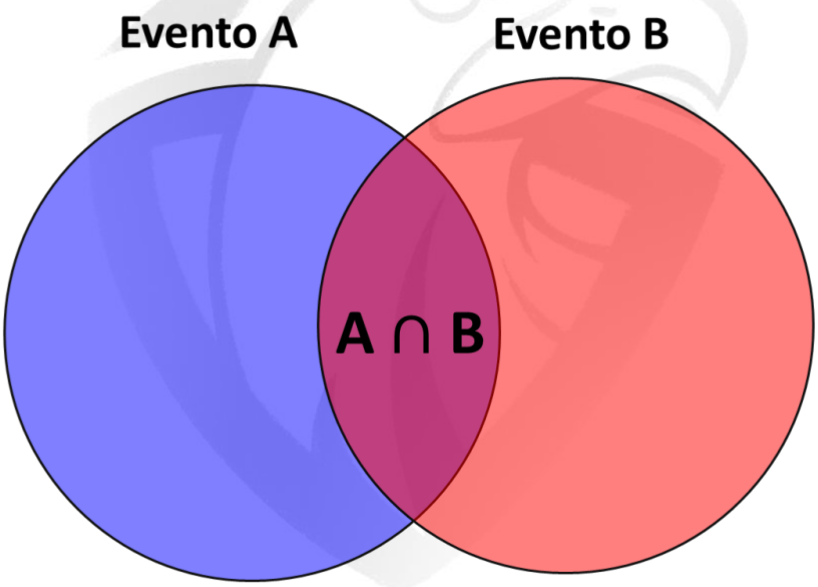
Antes de estudar as interações de eventos de probabilidade, é importante compreender que as formas de interação podem ser bem elucidadas pela teoria dos conjuntos.

Com isso, é importante entender como se obtém a probabilidade da **interseção** e da **união** de dois eventos probabilísticos.

3.1 Interseção de Eventos (∩)

A interseção de dois eventos probabilísticos consiste na probabilidade de **ocorrência conjuntamente,** isto é, os resultados de cada evento devem ocorrer simultaneamente. A simbologia matemática que representa a interseção é (∩). Em questões de probabilidade, é muito provável que a pergunta sobre a interseção dos eventos de probabilidade esteja lincada, de forma expressa, pelo **conectivo "E"**.

A probabilidade conjunta de um evento A e B quaisquer ocorrerem pode ser representada pela simbologia **P(A e B)** ou então **P(A ∩ B)**. Entenda pela representação em diagrama, em que a interseção corresponde a área em que o diagrama de A e B coincidem (área em roxo):



A e B ocorrem conjuntamente

A e B são dois eventos probabilísticos quaisquer, que podem estar ou não associados a um mesmo experimento aleatório. O diagrama de A representa todo o espaço em que A pode ocorrer; o diagrama de B representa todo o espaço que B pode ocorrer; a interseção de A e B corresponde a região onde a possibilidade de ocorrência dos dois eventos se sobrepõe, ou seja, onde podem ocorrer conjuntamente.

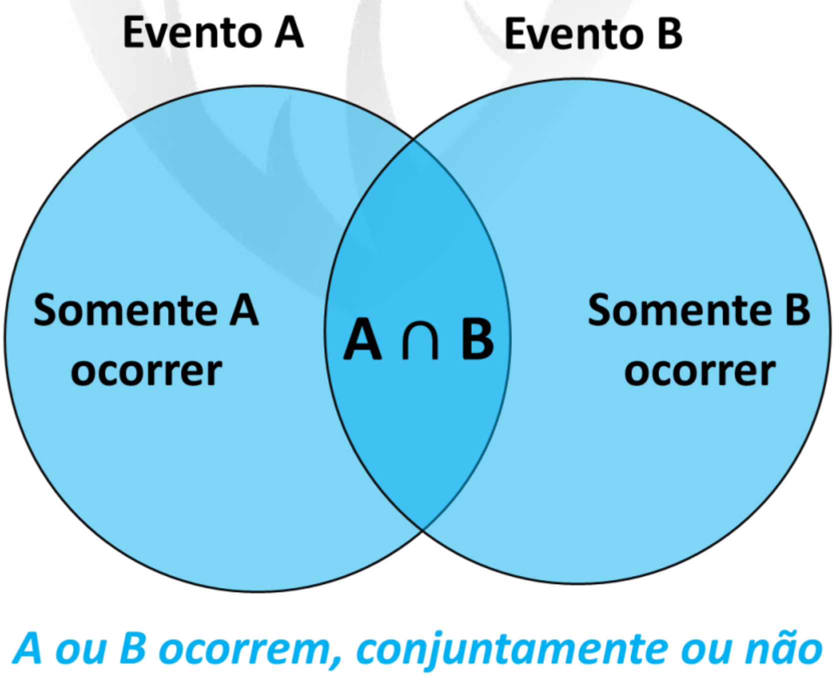
Para obter o valor da interseção, deve ser utilizado o princípio da **multiplicação** de probabilidades. Contudo, para multiplicar as probabilidades, é necessário conhecer a forma de interação entre os dois eventos probabilísticos, isto é, se são independentes ou dependentes.

3.2 União de Eventos (∪)

A união de dois eventos consiste na probabilidade de ocorrência de qualquer uma das possibilidades entre A e B, ou seja, inclui a ocorrência somente de A, a ocorrência somente de B, ou então, a ocorrência de A e B conjuntamente. A simbologia matemática de união é ∪.

Em questões de probabilidade, é muito provável que a pergunta sobre a união dos eventos esteja expressa pelo **conectivo "OU"**. A probabilidade do evento A ou B ocorrerem pode ser representada pela simbologia "**P(A ou B)**" ou então "**P(A ∪ B)**".

Entenda pela representação em diagrama:



Na representação do diagrama, é possível compreender que união de dois eventos de probabilidade quaisquer corresponde a soma da ocorrência somente de A, ocorrência somente de B e a ocorrência da interseção de A e B. Desse modo, a união de eventos pode ser obtida da mesma forma que a dedução matemática para união de conjuntos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Assim, se for somado a probabilidade total de A e B, é necessário subtrair uma vez a interseção de A e B. Isso porque as probabilidades totais já incluem a interseção, assim ela seria incluída duas vezes. O cálculo da união depende da ocorrência simultânea dos dois eventos, destarte, também varia conforme o tipo de interação entre os eventos probabilísticos.

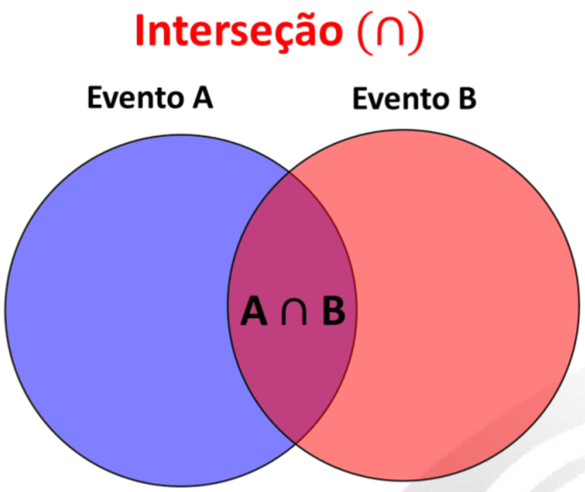
Com esse conhecimento, agora será discutido as formas de interação dos eventos de probabilidade e como serão efetuados os cálculos de interseção e união conforme cada tipo de interação.

3.3 Eventos Dependentes

*"Dois eventos probabilísticos A e B são considerados dependentes quando a ocorrência do evento A **modifica as probabilidades** do outro evento B, ou vice-versa."*

Nessa situação, é necessário compreender quais são as alterações na probabilidade do segundo evento, após o primeiro evento ter ocorrido. Por exemplo, se A e B são eventos dependentes com probabilidade de 1/7 e 1/8, respectivamente, ao ocorrer o evento A, a probabilidade de B será modificada **dado que A ocorreu – P(B|A),** por exemplo, a probabilidade de B dado que A ocorreu é de 1/10, isso quer dizer que ocorrência de A reduziu as chances de B. Nesse caso, temos a **probabilidade condicional** (que será estudada com mais detalhes a frente).

Dessa forma, a interseção será calculada pela multiplicação da probabilidade do primeiro evento com a probabilidade modificada (condicional) do segundo evento:



$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

ou

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

Portando, entenda que a notação "P(B|A)" representa a probabilidade do evento B dado que o evento A já tenha ocorrido anteriormente (note que B|A não é uma fração).

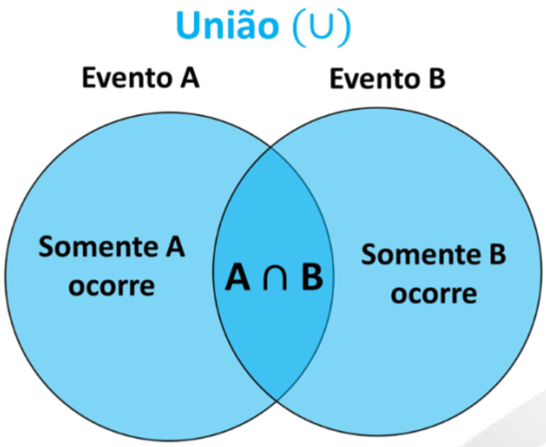
Assim como, pode existir também a "P(A|B)", que seria a probabilidade do evento A ocorrer dado que B ocorreu anteriormente. Dessa forma, em eventos dependentes, é sempre interessante observar que o segundo evento a ocorrer deve ser analisado com mais cautela, pois é preciso compreender como a probabilidade irá ser modificada, após a ocorrência do primeiro evento.

Com isso, **a ordem da ocorrência dos eventos interfere no cálculo**, pois a probabilidade de ocorrer o evento B é diferente da probabilidade do evento B ocorrer depois do evento A, assim como o contrário, desse modo:

$$P(A) \neq P(A|B)$$

$$P(B) \neq P(B|A)$$

No mesmo raciocínio, a união dos eventos será calculada aplicado a fórmula da união considerando a interseção para eventos dependentes:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B|A)$$

$$ou$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B) \times P(A|B)$$

Vamos aplicar esse conhecimento a partir de um exemplo:

O evento A consiste em "o suspeito é acusado de roubo" com probabilidade de ***P(A)=0,6****;*

O evento B é "o suspeito é acusado de homicídio" com probabilidade de ***P(B)=0,4****;*

Sabe-se que, se o suspeito é acusado de roubo, a probabilidade de ser acusado de homicídio aumenta para 0,5, isto é, ***P(B|A)=0,5****.*

- Qual a probabilidade da interseção entre A e B?

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$$

Isto é, a probabilidade de o suspeito ser acusado de roubo e homicídio é de 30%.

- Qual a probabilidade da união de A e B?

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = 0,6 + 0,4 - 0,3 = 0,7}$$

Isto é, a probabilidade de o suspeito ser acusado de roubo ou homicídio é de 70%.

- Podemos também encontrar a probabilidade condicional de A, se B ocorrer P(A|B), veja:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)}$$

$$\boldsymbol{0,3 = 0,4 \times P(A|B)}$$

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{0,3}{0,4} = 0,75}$$

Isto é, a probabilidade de o suspeito ser acusado de roubo, sabendo que foi acusado por homicídio, é de 75%.

3.4 Eventos Independentes

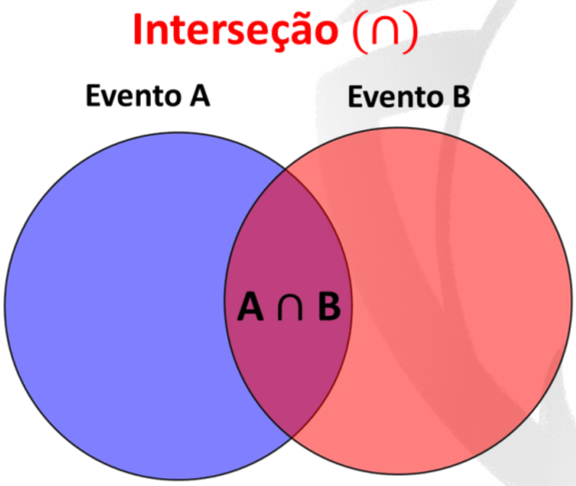
*“Dois eventos probabilísticos A e B são considerados independentes quando a ocorrência do evento A **não modifica as probabilidades** do outro evento B, ou vice-versa.”*

Assim, os valores de probabilidade do evento A permanecem os mesmos após a ocorrência do evento B e vice-versa. Com isso, a ordem em que os eventos ocorrem não interfere no cálculo da probabilidade, pois a probabilidade de ocorrer o evento B é igual a probabilidade do evento B ocorrer depois que o evento A ocorreu, assim como o contrário, desse modo:

$$P(A) = P(A|B)$$

$$P(B) = P(B|A)$$

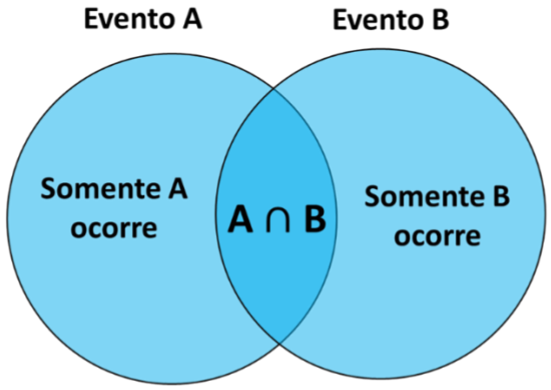
Sendo assim, para obter a interseção de dois eventos independentes basta multiplicar as probabilidades. Veja:



$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Da mesma forma, a união de eventos dependentes será calculada da seguinte forma:

União (∪)



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Por fim, vamos ver os cálculos por meio de exemplos:

*O evento A consiste em "a droga encontrada na investigação é cocaína" com probabilidade de **P(A)=0,4**;*
*O evento B é "a vítima socorrida morrer no acidente de trânsito" com probabilidade de **P(B)=0,25**;*
*Sabe-se que a droga encontrada nessa investigação ocorre **independentemente** da vítima socorrida no acidente de trânsito.*

- Qual valor da probabilidade da interseção de A e B?

$$P(A \cap B) = \mathrm{P(A)} \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$$

Isto é, a probabilidade de a droga encontrada ser cocaína e a vítima socorrida morrer no acidente de trânsito é de 10%.

- Qual a probabilidade da união entre A e B?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,25 - 0,1 = 0,55$$

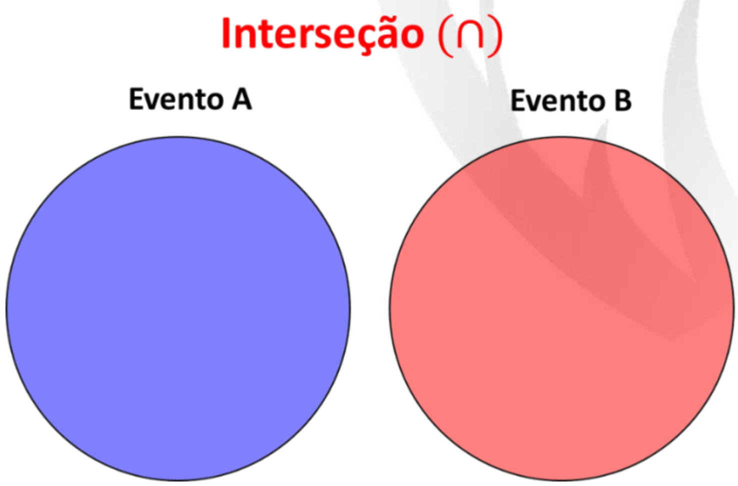
Isto é, a probabilidade de a droga encontrada ser cocaína e a vítima socorrida morrer no acidente de trânsito é de 10%.

3.5 Eventos Mutuamente Exclusivos

*"Dois eventos A e B são considerados mutuamente excludentes quando a ocorrência do evento A **anula certamente** a ocorrência de B, ou vice-versa."*

"Se A ocorrer, certamente B não ocorrerá, e vice-versa"

Portanto, não existe interseção entre esses dois eventos ($A \cap B = \emptyset$). São **eventos disjuntos**, que não se interseccionam em nenhum momento. Ainda, podemos concluir que a probabilidade condicional é nula também, pois se A ocorrer, B certamente não ocorrerá. Veja:

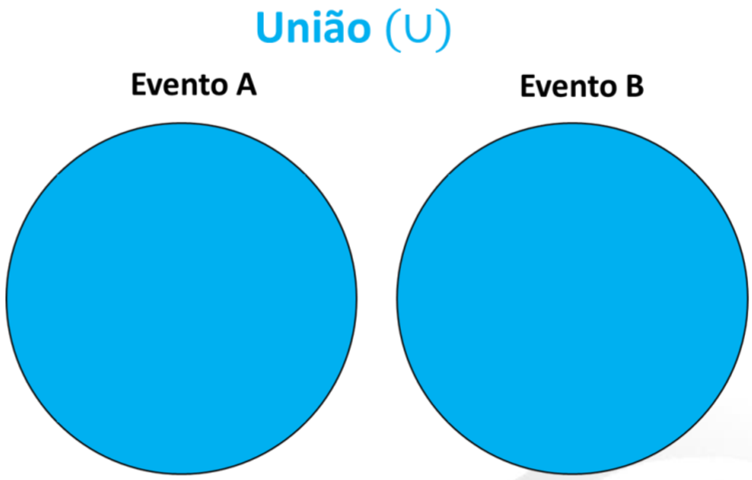


$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A|B) = 0 \ \ (Se\ B\ ocorreu, A\ certamente\ \text{não}\ ocorrer\text{á});$$

$$P(B|A) = 0 \ \ (Se\ A\ ocorreu, B\ certamente\ \text{não}\ ocorrer\text{á});$$

Assim, a união de eventos mutuamente exclusivos será:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Vamos ver por meio de um exemplo:

*O evento A consiste em "o crime X ocorreu na região Sudeste" com probabilidade de **P(A)=0,3**;*
*O evento B é "o crime X ocorre na região Nordeste" com probabilidade de **P(B)=0,15**;*
Sabe-se que o crime X ocorrerá em apenas em uma região do Brasil (eventos mutuamente exclusivos).

- Qual a probabilidade da interseção de A e B?

Não há A e B ocorrerem conjuntamente, ou o crime foi no Sudeste ou no Nordeste. Logo:

$$P(A \cap B) = 0$$

- Qual a probabilidade da união de A e B?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0,3 + 0,15 = 0,45$$

Isto é, a probabilidade de o crime ocorrer no Sudeste ou no Nordeste é de 45%.

3.6 Eventos Contidos

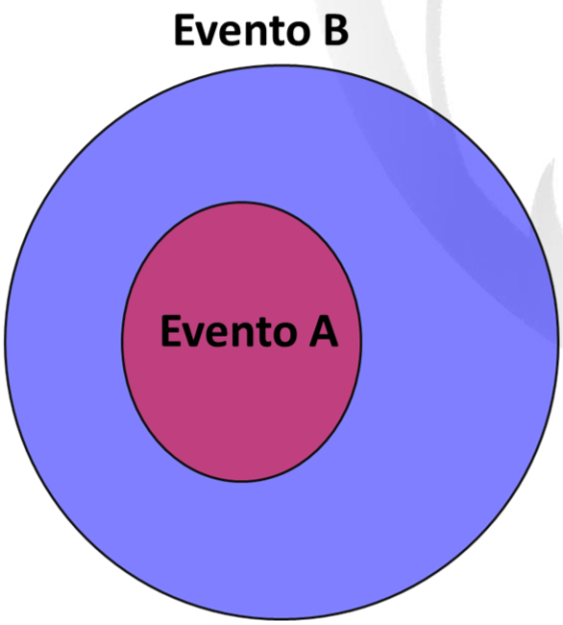
*O evento A está contido em B, quando a ocorrência do evento B **é necessária** para ocorrência de A, e o contrário não é necessário.*

A está contido em B ($A \subset B$)*, e B contém A* ($B \supset A$).

"Se A ocorrer, então B certamente ocorrerá também" "A então B" ($\boldsymbol{A \rightarrow B}$)

"Se B ocorrer, então A poderá ou não ocorrer também"

Nesse caso, temos uma relação em que B é **necessário** para A ocorrer, e A é **suficiente** para B ocorrer. Esse raciocínio está logicamente ligado a proposição condicional que é estudada em raciocínio lógico matemático. Assim, quando um evento é contido no outro, temos as seguintes conclusões:



$$P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(B)$$

Logo, podemos verificar que a interseção de eventos contido um no outro, será a própria probabilidade do evento menor (aquele que é contido), nesse exemplo, evento A. Isso porque, sempre que A ocorrer, B ocorrerá conjuntamente. Pelo diagrama é possível visualizar a interseção sendo o próprio evento A. Por outro lado, a união de eventos contidos, será a probabilidade do evento maior (aquele que contém), pois ele engloba a ocorrência de A e a sua.

Ainda, podemos verificar como funciona as probabilidades condicionais nesse caso. Se o evento A ocorrer, B necessariamente ocorrerá, então:

$$\boldsymbol{P(B|A) = 1}$$

Por outro lado, se B ocorrer, A não necessariamente ocorrerá, contudo podemos deduzir à seguinte conclusão:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)}$$

$$\boldsymbol{P(A) = P(B) \times P(A|B)}$$

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}}$$

A probabilidade A ocorrer, dado que B ocorre antes, será a razão entre a probabilidade de A com B.

Vamos ver por meio de exemplos:

O evento A consiste em “a Justiça condenar Sônia por essa denúncia” com probabilidade de **P(A)=0,5**.

O evento B consiste em “a Justiça receber a denúncia contra Sônia” com probabilidade de **P(B)=0,8**.

Para Sônia ser condenada, necessariamente, a Justiça deve receber a denúncia.

- Qual a probabilidade da interseção entre A e B?

$$P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = 0,5$$

Isto é, a probabilidade de a Justiça condenar e receber a denúncia contra Sônia é de 50%.

- Qual a probabilidade da união entre A e B?

$$P(A \cup B) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0,8$$

Isto é, a probabilidade de a Justiça condenar ou receber a denúncia contra Sônia é de 80%.

- Qual a probabilidade de A ocorrer dado que B ocorreu?

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{0,5}{0,8} = 0,625$$

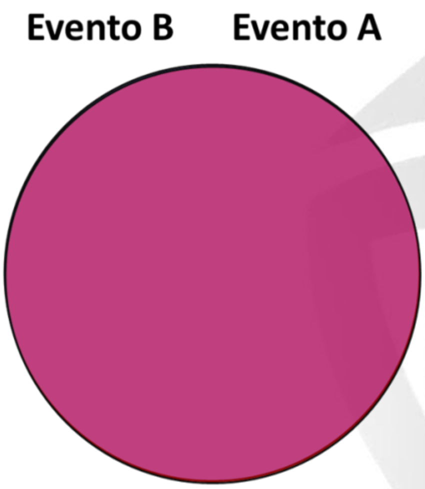
Isto é, a probabilidade de a Justiça condenar Sônia dado que já recebeu a denúncia é de 62,5%.

3.7 Eventos Coincidentes

Dois eventos A e B são coincidentes quando a ocorrência de A ***implica certamente*** *na ocorrência B, e vice-versa.*

"Se A ocorrer, então certamente B ocorrerá também, e vice-versa"

Basicamente, são dois eventos diferentes com as mesmas chances de ocorrer e relação alta de dependência, pois um implica na ocorrência certa do outro. Nesse caso, chegamos as seguintes conclusões:



$$P(A) = P(B)$$

$$P(B|A) = 1 \qquad P(A|B) = 1$$

$$P(A \cap B) = P(A) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) = P(B)$$

Logo, a probabilidade de A é igual a de B, as probabilidades condicionais serão iguais a 1, e a probabilidade da união é igual a interseção que é igual a probabilidade de A ou B.

Por fim, vamos ver um quadro que resume as principais interações de probabilidade:

Interação	$P(A \cap B)$ – Interseção	$P(A \cup B)$ – União	$P(A\|B)$ e $P(B\|A)$ Condicional
Eventos Dependentes	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B\|A)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B\|A)$	$P(A) \neq P(A\|B)$ $P(B) \neq P(B\|A)$
Eventos Independentes	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$	$P(A) = P(A\|B)$ $P(B) = P(B\|A)$
Eventos Mutuamente Exclusivos	0	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$P(A\|B)=0$ $P(B\|A)=0$
Eventos Contidos $(A \subset B)$	$P(A)$	$P(B)$	$P(A\|B)=P(A)/P(B)$ $P(B\|A)=1$
Eventos Coincidentes	$P(A) = P(B)$	$P(A) = P(B)$	$P(A\|B)=1$ $P(B\|A)=1$

4 PROBABILIDADE CONDICIONAL

A probabilidade condicional é a probabilidade de ocorrência de um evento dado que outro evento ocorreu anteriormente, e interferiu no valor da probabilidade desse evento. Em síntese ao que já foi abordado, trata-se da probabilidade da ocorrência do evento A dado que outro o evento B ocorreu anteriormente – "P(A|B)". Desse modo, essa probabilidade foi condicionada a um outro evento que ocorre a prior e influenciou o evento presente. A probabilidade condicional existe quando se trata de **eventos dependentes**.

É importante identificar, nas interpretações de texto, quando se trata de uma questão de probabilidade condicional. Geralmente, questões sobre probabilidade condicional ocorrem quando o enunciado fornece alguma informação sobre um resultado de experimento aleatório que já ocorreu. No texto, o aluno vai encontrar expressões como **"dado que"** ou então **"sabendo que"**. Vamos ver esse assunto por meio de um exemplo:

Em um estudo sobre a atividade policial na fronteira, sabe-se que a probabilidade de, em uma diligência, ocorrer um flagrante de tráfico de drogas é de 4/7 e a probabilidade de ocorrer um flagrante de contrabando é 3/7. Ainda, sabe-se que as chances de obter flagrantes de tráfico de drogas e contrabando na mesma diligência é de 2/7. Na quarta-feira, ocorreu um flagrante de contrabando. Assim, a probabilidade de ocorrer um flagrante de tráfico de drogas é de 2/3.

Nesse texto, em vermelho, temos o enunciado trazendo o contexto e a problemática do caso hipotético. Nele, é informado: a probabilidade de ocorrer flagrante de tráfico de drogas (vamos denominar de evento T), isto é, P(T)=4/7; a probabilidade de ocorrer flagrante de contrabando (vamos denominar de evento C), isto é, P(C)=3/7; e a probabilidade da interseção de ocorrer flagrante de tráfico e contrabando conjuntamente, isto é, P(T e C)=2/7.

Em azul, é apresentado um fato certo que ocorreu na quarta feira: houve um flagrante de contrabando. Logo, a ocorrência de flagrante de contrabando se tornou um evento certo. Assim, se existir uma relação de dependência entre as ocorrências de flagrante de contrabando e tráfico de drogas, será alterada. Desse modo, em roxo, verificamos a probabilidade condicional de ocorrer flagrante de tráfico de drogas sabendo que ocorreu flagrante de contrabando, isto é, P(T|C)=2/3.

Agora, como seria uma questão sobre probabilidade condicional utilizando esse contexto? Veja:

Em um estudo sobre a atividade policial na fronteira, sabe-se que a probabilidade de, em uma diligência, ocorrer um flagrante de tráfico de drogas é de 4/7 e a probabilidade de ocorrer um flagrante de contrabando é 3/7. Ainda, sabe-se que as chances de obter flagrantes tráfico de drogas e contrabando na mesma diligência é de 2/7. **Qual a probabilidade, em uma diligência policial na fronteira, ocorrer um flagrante de tráfico de drogas, sabendo que houve flagrante de contrabando?**

Nesse caso, temos as probabilidades P(T), P(C) e P(T e C). Como podemos chegar no valor da probabilidade condicional, naquela 2/3 que foi apresentado inicialmente?

Podemos aplicar a fórmula da probabilidade condicional, deduzida pelo cálculo da interseção, veja:

$$\boldsymbol{P(T \text{ e } C) = P(C) \times P(T|C)}$$

$$\boldsymbol{P(T|C) = \frac{P(T \text{ e } C)}{P(C)}}$$

Sendo assim, aplicando os valores da questão temos:

$$\boldsymbol{P(T|C) = \frac{2/7}{3/7} = \frac{2}{3}}$$

Com isso, chegamos na probabilidade condicional de ocorrer flagrante de tráfico de drogas, sabendo que ocorrer flagrante de contrabando. E o mesmo de aplica se for o inverso, isto é, se for de interesse saber qual é probabilidade de ocorrer flagrante de contrabando sabendo que ocorreu o de tráfico de drogas P(C|T). Nesse caso, teremos o seguinte cálculo:

$$P(C|T) = \frac{P(T\ e\ C)}{P(T)}$$

$$P(C|T) = \frac{2/7}{4/7} = \frac{2}{4}$$

Essa fórmula de se obter a probabilidade condicional é também conhecida como **Teorema de Bayes,** que também pode ser representado da seguinte forma:

$$P(T|C) = \frac{P(T\ e\ C)}{P(T)} = \frac{P(T) \times P(C|T)}{P(C)}$$

Simplesmente, a fórmula expande o cálculo da interseção para eventos dependentes.

Sobretudo, a probabilidade condicional pode ser obtida por meio da fórmula (Teorma de Bayes), ou então, por meio de interpretação da problemático, reduzindo o espaço amostral e aplicando a fórmula básica da probabilidade.

Probabilidade Condicional

Por meio da Fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \; e \; B)}{P(B)}$$

Interpretação: reduz o espaço amostral e aplica fórmula básica

Já vimos exemplo de questão onde se aplica a fórmula. Agora, vamos ver outro exemplo para aplicar o método da interpretação. Veja:

Um estudo apresenta 150 ocorrências de flagrantes (tráfico de drogas, contrabando e descaminho), por ação policial na fronteira, discriminando os dias de semana e fim de semana. Os valores observados são apresentados na tabela a abaixo.

Crime	**Segunda a Sexta**	**Fim de Semana**
Tráfico de Drogas	12	26
Contrabando	16	34
Descaminho	22	40

Qual a probabilidade de ocorrer um flagrante de descaminho, sabendo que a ação ocorre no fim de semana?

Nesse caso, podemos interpretar pelo contexto que, ao saber que a ação ocorreu no fim de semana, podemos eliminar todas as ocorrências que ocorreram nos dias de semana. Logo, o espaço amostral que incialmente era de 150 ocorrências, é reduzido para 100 ocorrências, pois eliminou as 50 ocorrências dos dias de semana (12+16+22).

Crime	Segunda a Sexta	Fim de Semana
Tráfico de Drogas	12	26
Contrabando	16	34
Descaminho	22	40

Assim, a probabilidade de ocorrer um flagrante de descaminho, sabendo que é fim de semana P(D|F), será igual:

$$\boldsymbol{P(D|F) = \frac{40}{100} = 40\%}$$

5 PROBABILIDADE COMPLEMENTAR

A probabilidade complementar consiste na ocorrência de qualquer outro evento, dentro do espaço amostral, que não seja o evento de interesse. Ou seja, é a probabilidade que falta para alcançar 100%. Em outras palavras, é a probabilidade que complementa os eventos que pertencem ao espaço amostral, mas não são contemplados pelo resultado de interesse.

A probabilidade complementar de um evento X pode ser representada por qualquer uma dessas simbologias:

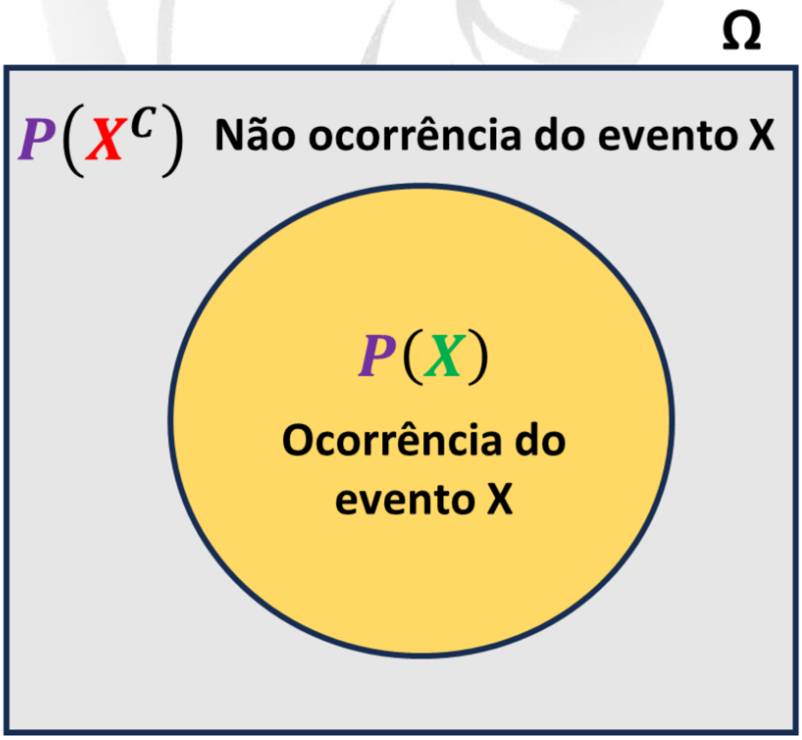
$$P(X \text{ não ocorrer}) = P\left(X^C\right) = P(\sim X) = P(\neg X) = P(\overline{X})$$

Essa definição está associada ao 3º axioma da probabilidade, em que:

$$P(X \text{ ocorrer}) + P(X \text{ não ocorrer}) = 1$$

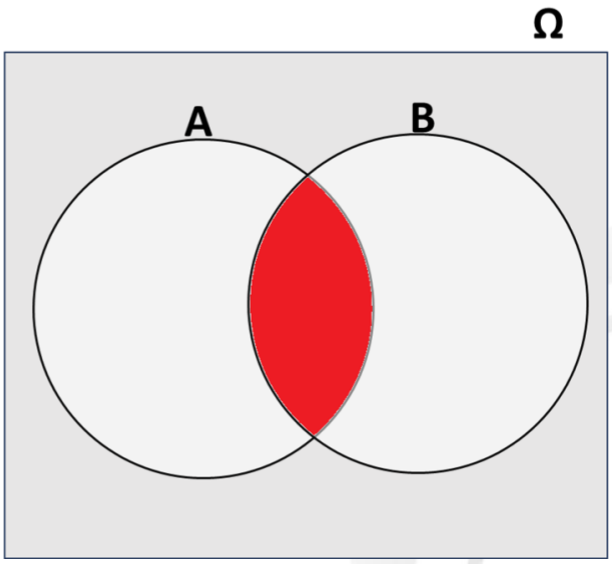
$$P(X) + P\left(X^C\right) = 1$$

Podemos representar a probabilidade complementar a partir de diagramas da seguinte forma:



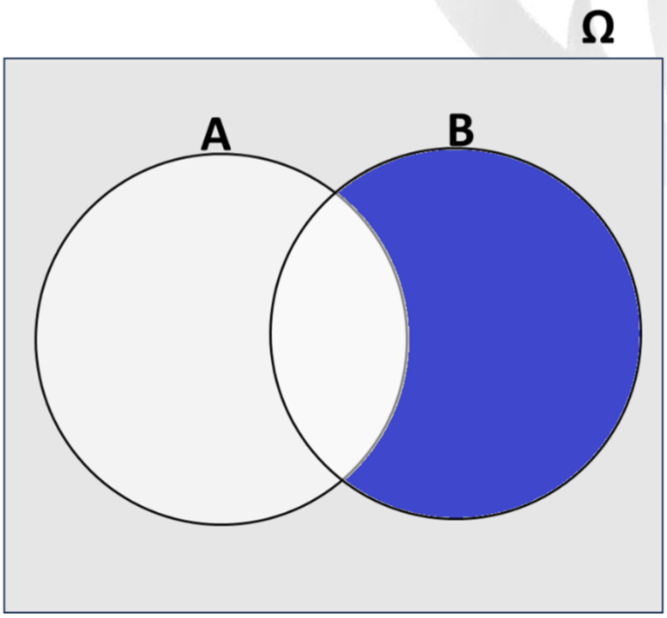
Portanto, tudo aquilo que não está contemplado dentro do círculo que representa a ocorrência do evento A, pertence a ocorrência da complementar de A.

Pelo conhecimento da probabilidade complementar, podemos obter novas deduções matemáticas importantes para responder questões de estatística. Como já vimos, a interseção de dois eventos é calculada assim:



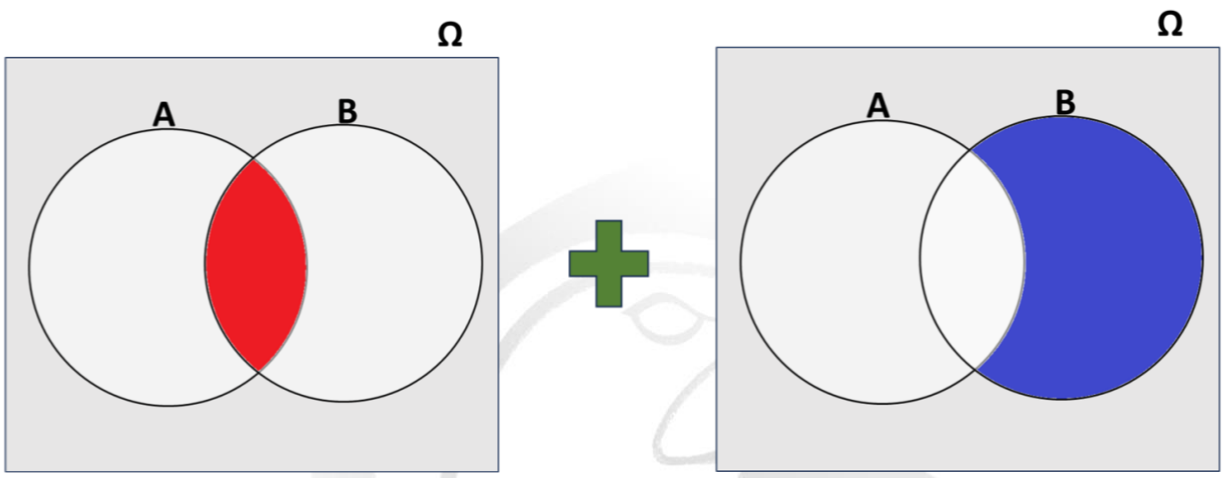
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Nesse mesmo raciocínio, podemos aplicar que a área que falta para completar a probabilidade de B é **a interseção de B com complementar A.** Assim, podemos calcular a área restante pela seguinte forma:



$$P(A^C \cap B) = P(A^C) \times P(B|A^C)$$

Com esse conhecimento, podemos aplicar o **Teorema da Probabilidade Total** que permite calcular a probabilidade de um evento a partir de seus componentes. Este teorema é especialmente útil quando se lida com eventos que podem ser decompostos em sub eventos. Desse modo, caso não tenhamos conhecimento da probabilidade de B, podemos obter ela **somando** os dois componentes: **a interseção de A com B mais a interseção de não A com B**. Veja:



$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$ $\qquad$ $P(A^C \cap B) = P(A^C) \times P(B|A^C)$

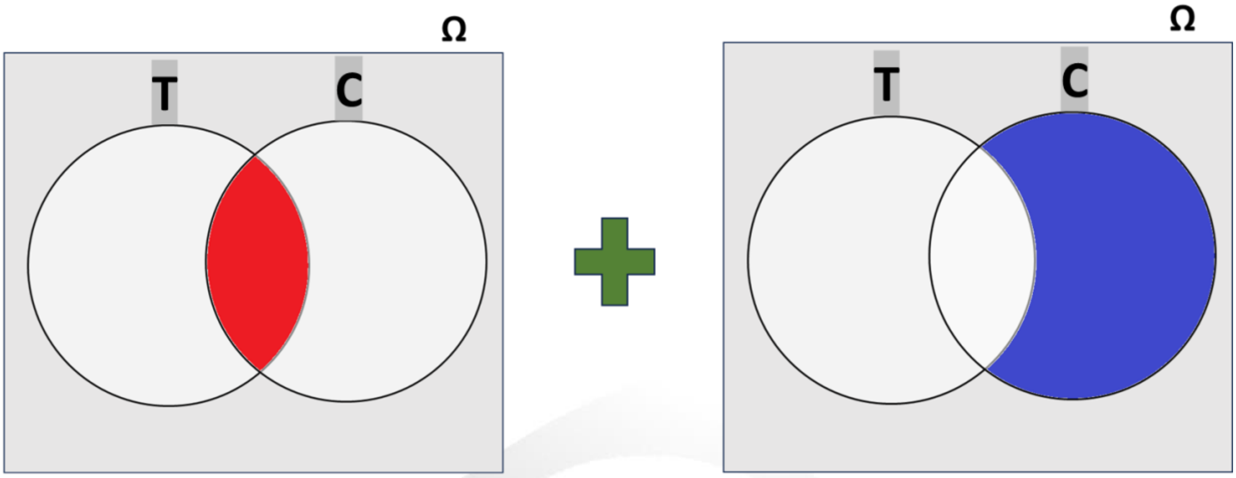
$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$$

$$P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(A^C) \times P(B|A^C)$$

Agora, vamos aplicar esse conhecimento por meio de exemplos.

Em um estudo sobre a atividade policial na fronteira, sabe-se que a probabilidade de, em uma diligência, ocorrer um flagrante de tráfico de drogas é de 4/7. Ainda, sabe-se que as chances de obter flagrantes tráfico de drogas e contrabando na mesma diligência é de 2/7 e a probabilidade de ocorrer flagrante de contrabando e não ocorrer de tráfico de drogas é de 3/7. Qual a probabilidade de ocorrer flagrante de contrabando?

Nesse exemplo, queremos obter a probabilidade de ocorrer flagrante de contrabando P(C). A questão já nos informa as probabilidades da interseção de ocorrer flagrante de tráfico de drogas e contrabando, P(T e C)=2/7, e a interseção de ocorrer flagrante de contrabando e não ocorrer flagrante de tráficos de drogas, P(T^C e C)=3/7. Logo, basta somar esses dois componentes para chegar na resposta.



$$P(C) = P(T \cap C) + P(T^C \cap C)$$

$$P(C) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

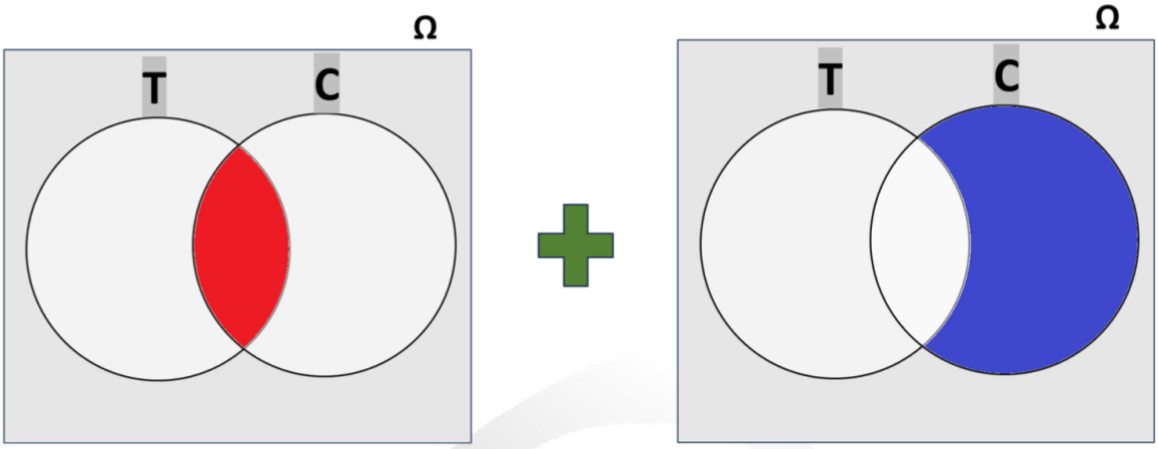
Agora, vamos para uma segunda forma de questão.

Em um estudo sobre a atividade policial na fronteira, sabe-se que a probabilidade de, em uma diligência, ocorrer um flagrante de tráfico de drogas é de 4/7. Ainda, sabe-se que as chances de obter flagrantes de contrabando, sabendo que houve de tráfico na mesma diligência é de 1/4. Como também, a probabilidade de ocorrer flagrante de contrabando, sabendo que não ocorreu de contrabando é de 7/8. Qual a probabilidade de ocorrer flagrante de contrabando?

Nessa questão, temos:

- A probabilidade de ocorrer flagrante de tráfico de drogas, P(T)=4/7;
- Logo, sabemos a complementar de não ocorrer flagrante de tráfico de drogas, P(T^C)=3/7;
- A probabilidade de ocorrer flagrante de contrabando, sabendo que ocorreu flagrante de tráfico de drogas, P(C|T)=1/4;
- A probabilidade de ocorrer flagrante de contrabando, sabendo que não ocorreu flagrante de tráfico de drogas, P(C|T^C)=7/8.

Desse modo, podemos obter a probabilidade de ocorrer flagrante de contrabando com uso do Teorema da probabilidade total, veja:



$$P(T \cap C) = P(T) \times P(C|T) \qquad P(T^C \cap C) = P(T^C) \times P(C|T^C)$$

$$P(C) = P(T) \times P(C|T) + P(T^C) \times P(C|T^C)$$

$$P(C) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{7} \times \frac{7}{8}$$

$$P(C) = \frac{1}{7} + \frac{3}{8} = \frac{29}{56} \cong 51\%$$

QUESTÕES DE RENDIMENTO

01 (IBFC|2022|PC-BA|ESCRIVÃO)

A tabela indica a idade das pessoas atendidas numa delegacia em certo dia.

	Até 30 anos	Acima de 30 anos
Homens	15	13
Mulheres	10	12

Se uma pessoa fosse escolhida, aleatoriamente, a probabilidade de ela ser uma mulher, sabendo que sua idade é de até 30 anos é igual:

a) 20%
b) 40%
c) 50%
d) 30%
e) 45%

Resolução

Trata-se de uma questão de probabilidade condicional, em que sabemos que a idade da pessoa escolhida é **de até 30 anos**. Nesse sentido, o espaço amostral será de 25 possibilidades apenas. Como é de interesse obter uma mulher, logo temos o seguinte cálculo:

$$P(M| \leq 30) = \frac{10}{25} = 40\%$$

ALTERNATIVA CERTA: LETRA B.

02 (IBFC|2022|PC-BA|DELEGADO)

Um delegado precisa analisar 16 inquéritos distintos, sendo 6 relacionados a roubo, 5 relacionados à agressão e o restante relacionados à pensão alimentícia. Nessas condições, a probabilidade desse delegado escolher somente um inquérito e esse ser relacionado a roubo, sabendo que esse inquérito não é relacionado à agressão, é aproximadamente igual a:

a) 55%
b) 38%
c) 67%
d) 44%
e) 75%

Resolução

Uma vez que a questão afirma que **sabendo que esse inquérito não é relacionado à agressão,** podemos reduzir o espaço de 16 inquéritos para 11. Isso porque sabemos que não foi sorteado os 5 inquéritos de agressão. Assim, a probabilidade de escolher um inquérito relacionado a roubo é de:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Roubo}|\textbf{não é}\ \boldsymbol{agressão}) = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}} \cong \mathbf{55\%}$$

ALTERNATIVA CERTA: LETRA A.

03 (CESPE|2023|PC-AL|AUXILIAR PERÍCIA)

Considerando que, em uma grande operação policial em Alagoas, tenham sido enviados agentes de Maceió para as diversas cidades e supondo que o deslocamento dos agentes tenha sido realizado por micro-ônibus de 20 lugares, veículos SUV de 5 lugares e sedãs de 4 lugares, julgue o item seguinte.

Considerando-se que, para a cidade de Penedo, tenham sido enviados 38 agentes distribuídos em um micro-ônibus, duas SUV e dois sedãs, é correto afirmar que, caso se selecione, ao acaso, um desses 38 agentes, a probabilidade de o agente selecionado ter-se deslocado para Penedo utilizando um veículo SUV é inferior a 0,31.

( ) Certo ( ) Errado

Resolução

Os 38 agentes estão distribuídos exatamente nos 20 lugares do micro-ônibus, 10 lugares dos dois SUVs, e nos 8 lugares dos dois sedãs. Logo, a probabilidade de selecionar um desses 38 agentes e ele está no veículo SUV é de:

$$P(SUV) = \frac{10}{38} = 0,26$$

Logo, a questão está correta, pois é inferior a 0,31.

ALTERNATIVA CERTA.

04 (CESPE|2018|ABIN|TÉCNICO INTELIGÊNCIA)

A tabela abaixo mostra dados de sobrevivência (em dias) de uma coorte de animais acometidos por uma doença aguda. Na primeira coluna, t corresponde aos dias, sendo t = 0 o dia em que a contagem começou a ser feita; v_t, na segunda coluna, é a quantidade de animais vivos no início do dia t; d_t, na terceira coluna, indica quantos animais morreram no decorrer do dia t.

t	v_t	d_t
0	10.000	500
1	9.500	700
2	8.800	800
3	8.000	800
4	7.200	1.080
5	6.120	720
6	5.400	1.350
7	4.050	1.350
8	2.700	1.200
9	1.500	1.500

Se um animal que estivesse vivo no início do dia t = 4 fosse escolhido ao acaso, a probabilidade de ele ter chegado vivo no dia t = 7 seria superior a 60%.

( ) Certo ( ) Errado

Resolução

A tabela registra os dias (representado por t) de um grupo de animais que estão sofrendo por uma enfermidade aguda. A cada dia há um registro da quantidade de animais vivos no início do dia (v) e outro registro que informa a quantidade de animais que morreram até o fim do dia (d). Portanto, para cada dia t, teremos o registro de uma quantidade de animais vivos e mortos.

Ao interpretar a tabela, vamos analisar agora a condição exposta pela questão. **Se um animal que estiver vivo no dia t=4 for escolhido aleatoriamente...**

Para o animal está vivo no dia t=4, ele pertence aos 7200 animais registrados como vivo no início do dia t=4. Logo, a quantidade do espaço amostral nesse exemplo corresponde a 7200.

$$n(\Omega) = 7200$$

Isso porque existem 7200 animais vivos no dia t=4 que podem não estar vivo até o dia t=7.

Agora, vamos determinar o evento de interesse:

...a probabilidade de ele ter chegado vivo no dia t=7 seria superior a 60%.

O evento de interesse, nessa questão, corresponde ao animal permanecer vivo até o dia t=7 (vamos denominar de evento V). Pela tabela, podemos detectar que há 4050 animais vivos no dia t=7. Por essa razão, podemos concluir que, ao escolher um animal aleatoriamente, existem 4050 animais que irão permanecer vivos do dia t=4 até o dia t=7. Logo:

$$n(V) = 4050$$

Por fim, a probabilidade de escolher um animal em t=4 e ele permanecer vivo até o dia t=7 será de:

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{N^{\underline{o}}\ resltados\ favoráveis}{N^{\underline{o}}\ resltados\ possíveis}$$

$$P(V) = \frac{N^{\underline{o}}\ animais\ vivos\ até\ t = 7}{N^{\underline{o}}\ animais\ vivos\ no\ início\ de\ t = 4}$$

$$P(V) = \frac{4050}{7200} = 0,5625$$

Portanto, a probabilidade é de 0,5625 ou 56,25%. Esse resultado é inferior a 60%, logo essa questão está errada!

ALTERNATIVA ERRADA.

05 (CESPE|2015|DEPEN|AGENTE EXECUÇÃO PENAL)

Considerando que, entre a população carcerária de um presídio, a probabilidade de um detento contrair tuberculose seja igual a 0,01; que dois detentos sejam selecionados aleatoriamente dessa população carcerária; e que as ocorrências de tuberculose entre esses detentos sejam eventos independentes, julgue o item.

A probabilidade de os dois detentos na amostra contraírem tuberculose será igual a 0,02.

( ) Certo ( ) Errado

Resolução

A questão deixa claro que o fato de um prisioneiro contrair tuberculose não afeta a possibilidade de outro também contrair a doença. Desse modo, temos dois eventos probabilísticos **independentes**. Assim, a probabilidade de dois detentos contraírem tuberculose consiste na **interseção** desses dois eventos, isto é, na ocorrência simultânea de que cada amostragem obtenha um prisioneiro com tuberculose.

Em síntese, a probabilidade conjunta de dois eventos independentes (A e B) é igual ao produto das probabilidades de ocorrência de cada um. Assim, temos que:

$$\boldsymbol{P(A\ e\ B) = P(A) \times P(B)}$$

$$\boldsymbol{P(A\ e\ B) = 0,01 \times 0,01 = 0,0001}$$

A questão tenta confundir o evento de união com interseção. Efetuando assim a operação de soma ao invés de multiplicar. Porém, fica claro a ideia de ocorrência simultânea, e não de alternativamente. Questão Errada!

ALTERNATIVA ERRADA.

06 (CESPE|2015|DEPEN|AGENTE EXECUÇÃO PENAL)

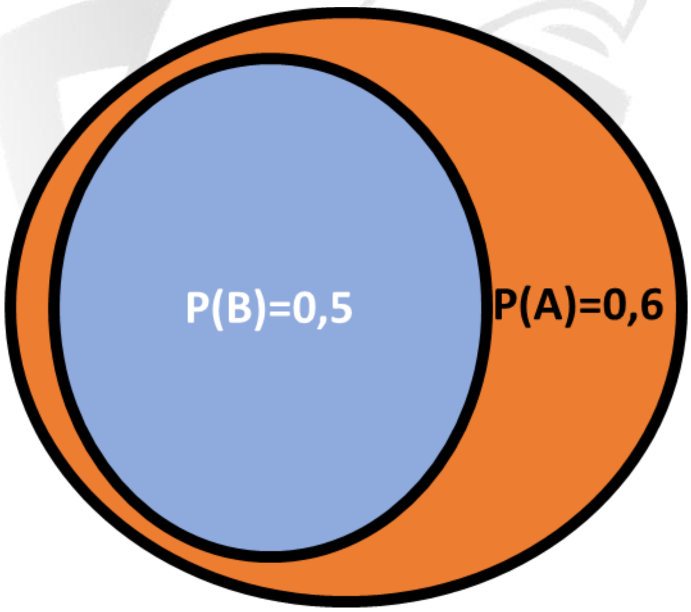
Considerando que um estudo a respeito da saúde mental em meio prisional tenha mostrado que, se A = "o preso apresenta perturbação antissocial da personalidade" e B = "o preso apresenta depressão", então P(A) = 0,6 e P(B) = 0,5, julgue o item a partir dessas informações.

Se $B \subset A$, então $P(A \cup B) = 0{,}6$.

( ) Certo ( ) Errado

Resolução

A expressão $B \subset A$ indica que o evento probabilístico B está contido no evento A. Isso de fato pode ocorrer, pois o evento A é maior que B e, portanto, pode englobar toda a ocorrência de B. Dessa forma, temos a seguinte representação em diagrama:



Ainda, a questão informa que a probabilidade da união de A e B é igual a 0,6, isto é igual a P(A), pois em eventos contidos sabemos que a união dos eventos será igual a probabilidade do maior evento, nesse caso, o evento A [$P(A \cup B) = P(A) = 0{,}6$]. Só com isso, já resolvemos a questão, contudo, vamos desdobrar o cálculo da união apenas para certificar.

A probabilidade da união de dois eventos é calculada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A soma das probabilidades individuais menos a probabilidade da interseção de A e B **(interseção)**. Veja que a probabilidade da interseção de A e B é a própria probabilidade de B, já que B ⊂ A **(B está contido em A)**. Isso porque sempre que B ocorrer, A também irá ocorrer, desse modo, a ocorrência simultânea de A e B é todo o evento B:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = P(B) = 0,5$$

Por fim, temos que a união dos dois eventos é:

$$P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - 0,5 = 0,6$$

Assim, a questão está correta ao afirmar exatamente isso.

ALTERNATIVA CERTA.

07 (CESPE|2015|DEPEN|AGENTE EXECUÇÃO PENAL)

Considerando que um estudo a respeito da saúde mental em meio prisional tenha mostrado que, se A = "o preso apresenta perturbação antissocial da personalidade" e B = "o preso apresenta depressão", então P(A) = 0,6 e P(B) = 0,5, julgue o item a partir dessas informações.

Os eventos A e B não são mutuamente excludentes e $0,1 < P(A \cap B) < 0,5$.

( ) Certo ( ) Errado

Resolução

Para que dois eventos A e B sejam mutuamente exclusivos, a interseção entre esses eventos deve ser **nula**. Logo:

Se A e B são mutuamente exclusivos,

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \mathbf{0}$$

Se A ocorrer, B certamente não ocorrerá;
Se B ocorrer, A certamente não ocorrerá;

Assim, a união de A com B teria o seguinte valor:

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \mathbf{0,6} + \mathbf{0,5} - \mathbf{0} = \mathbf{1,1}}$$

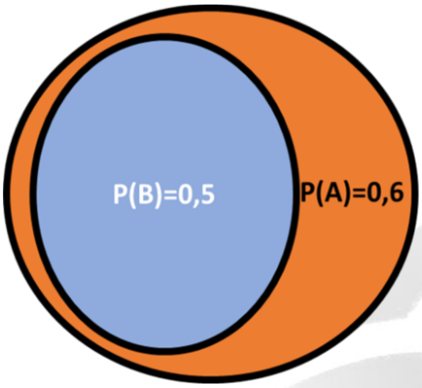
Resultado impossível! Probabilidade não pode ser maior que 1.

Em síntese, os eventos A e B não podem ser mutuamente exclusivos, pois se a interseção fosse nula, a união desses dois eventos terá um valor de probabilidade maior do que 1,0. Resultado esse impossível ao se tratar de probabilidade. Violaria o 1º axioma da probabilidade ($\mathbf{0} \leq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}) \leq \mathbf{1}$).

Dessa forma, temos que a A e B não são mutuamente exclusivos. A primeira afirmativa da questão está correta!

Com isso, sabemos que existe uma interseção entre A e B. Portanto, baseado na fórmula da união, existem duas possibilidades extremas:

1) A união tem valor mínimo e a interseção tem valor máximo de modo que B está contido em A, ou seja, o valor mínimo da união é a própria probabilidade de A. Veja:

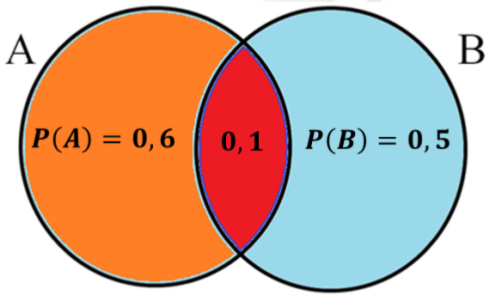


$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) = 0,5}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - 0,5}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) = 0,6}$$

2) A união tem valor máximo e a interseção tem valor mínimo de modo que a união de A com B é igual a 1 (ou 100%):



$$\boxed{P(A \cap B) = 0,1}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - 0,1}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = 1,0}$$

Apesar de não conhecermos o valor exato da interseção de A e B, sabemos os limites que o valor dessa probabilidade pode assumir. Portanto, temos que a interseção de A e B estará compreendida no seguinte intervalo:

$$0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$$

Em suma, a questão está correta, pois A e B **não** são mutuamente exclusivos e a probabilidade da interseção está compreendida entre $0,1 \geq P(A \cap B) \geq 0,5$.

ALTERNATIVA CERTA.

08 (CESPE|2019|TJ/AM|ANALISTA JUDICIÁRIO)

Em um espaço de probabilidades, as probabilidades de ocorrerem os eventos independentes A e B são, respectivamente, P(A) = 0,3 e P(B) = 0,5.

Nesse caso, P(AUB) é superior a 0,7.

( ) Certo ( ) Errado

Resolução

A probabilidade da união de dois eventos A e B [**P(AUB)**] é calculada da seguinte forma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Em síntese, a união de dois eventos probabilísticos é a **soma** das probabilidades separadas de A e B **menos** a interseção de A e B. Basicamente, soma-se as probabilidades dos dois eventos e subtrai a possibilidade em que os eventos podes ocorrer ao mesmo tempo, pois se não seria somado duas vezes.

Essa é a essência do cálculo da união de conjuntos!

Baseado nessa dedução, já sabemos a probabilidade de A (0,3) e B (0,5) separadamente. Agora, precisamos calcular a probabilidade conjunta de A e B, isto é, a **interseção**. A questão informa que A e B são **eventos independentes**, logo a ocorrência de A não afeta a probabilidade de B. Por essa razão, a interseção de A e B é calculada pelo produto das probabilidades separadas de A e B. Assim:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

Após obter o valor da interseção, podemos calcular a união A e B:

$$P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$$

Portanto, a questão está errada, pois a probabilidade da união é **inferior** a 0,7.

ALTERNATIVA ERRADA.

---

09 (CESPE|2015|DEPEN|AGENTE EXECUÇÃO PENAL)

As probabilidades dos eventos aleatórios A="o infrator é submetido a uma pena alternativa" e B ="o infrator reincide na delinquência" são representadas, respectivamente, por P(A) e P(B). Os eventos complementares de A e B são denominados, respectivamente, por $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Considerando que P(A)=0,4, e que as probabilidades condicionais P(B|$\bar{A}$)=0,3 e P(B|A)=0,1, julgue o item a seguir.

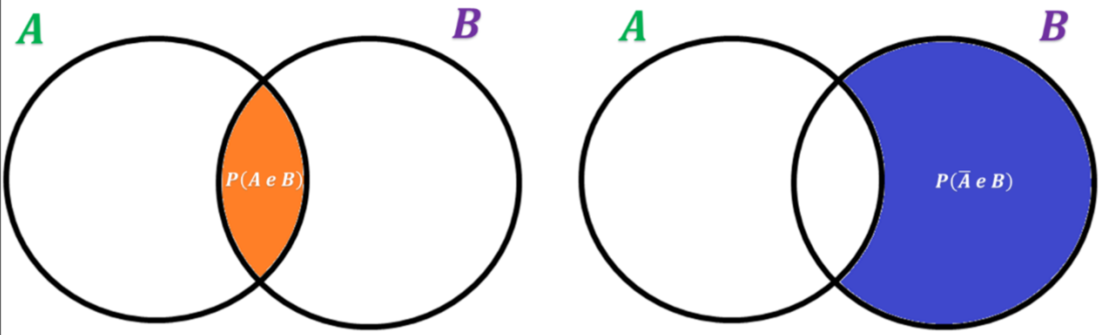
P(B) < 0,2.

( ) Certo ( ) Errado

Resolução

A questão fornece a probabilidade do evento A (o infrator é submetido a uma pena alternativa) P(A)=0,4. Contudo, a questão não fornece a probabilidade do evento B (o infrator reincide na delinquência), apenas apresenta as probabilidades condicionais de B dado que A ocorreu [P(B|A)=0,1] e dado que A **não** ocorreu [P(B|$\bar{A}$)=0,3].

Nessa situação, podemos obter a probabilidade de B calculando a área da interseção com A e a área da interseção com **não** A ($\bar{A}$). A soma dessas duas interseções resultará na probabilidade de B. Veja a definição da fórmula a partir do diagrama:



$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A) \qquad P(\bar{A} \text{ e } B) = P(\bar{A}) \times P(B|\bar{A})$$

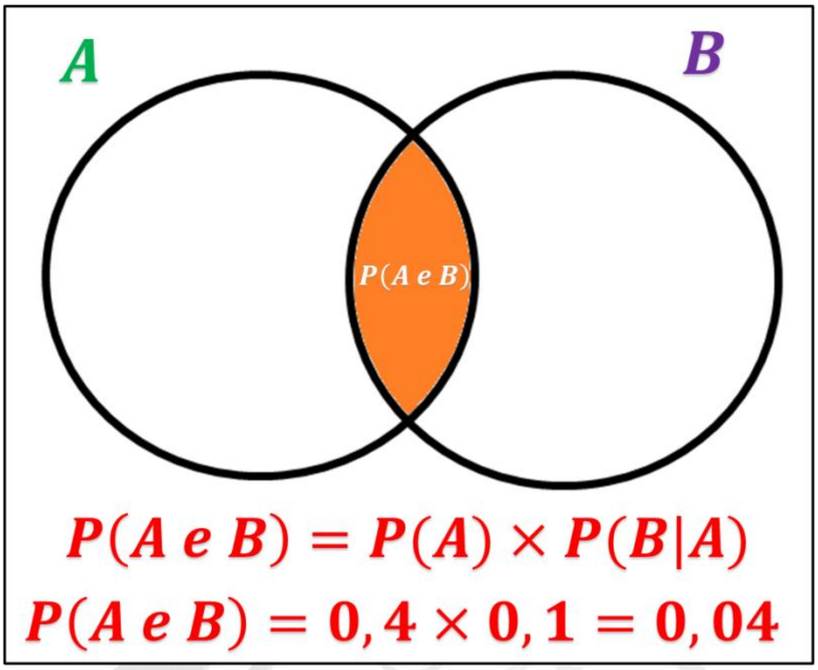
$$\boxed{P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(\bar{A}) \times P(B|\bar{A})}$$

Essa definição também é conhecida como teorema da probabilidade total. Todo o digrama que representa B pode ser obtido somando as duas áreas pintadas.

Em outras palavras, vamos calcular probabilidade de o infrator reincidir na delinquência **e** ser submetido a uma pena alternativa P(A e B), mais a probabilidade de o infrator reincidir na delinquência **e não** ser submetido a uma pena alternativa separadamente P($\bar{A}$ e B). A soma dessas duas interseções resultará na probabilidade de o infrator reincidir na delinquência P(B).

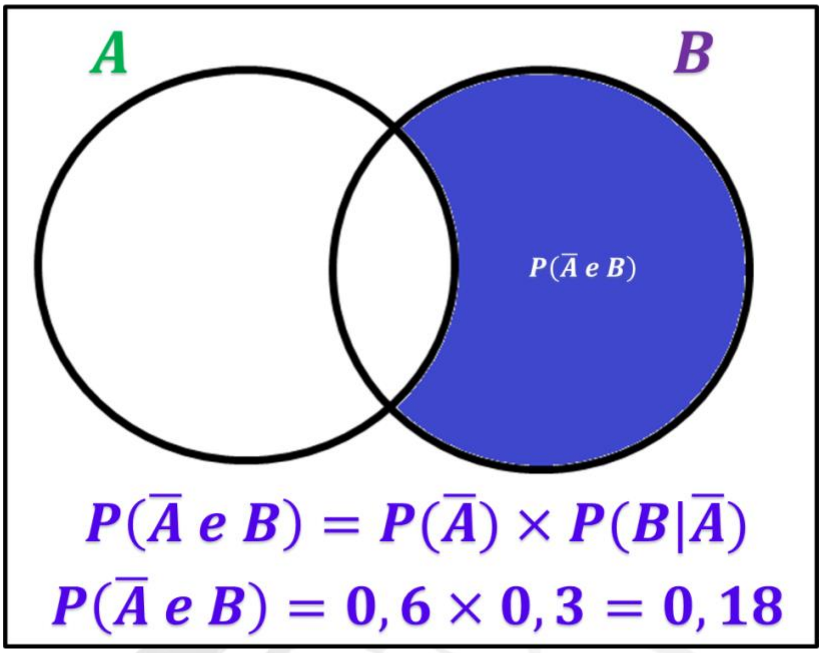
Agora, vamos calcular cada uma das interseções.

A interseção de A com B é calculada pelo produto das probabilidades de A com a probabilidade B dado que A ocorreu. Ambas as informações são fornecidas na questão P(A)=0,4 e P(B|A)=0,1 , então facilmente podemos calcular essa interseção. Assim, temos que a primeira área é igual a:

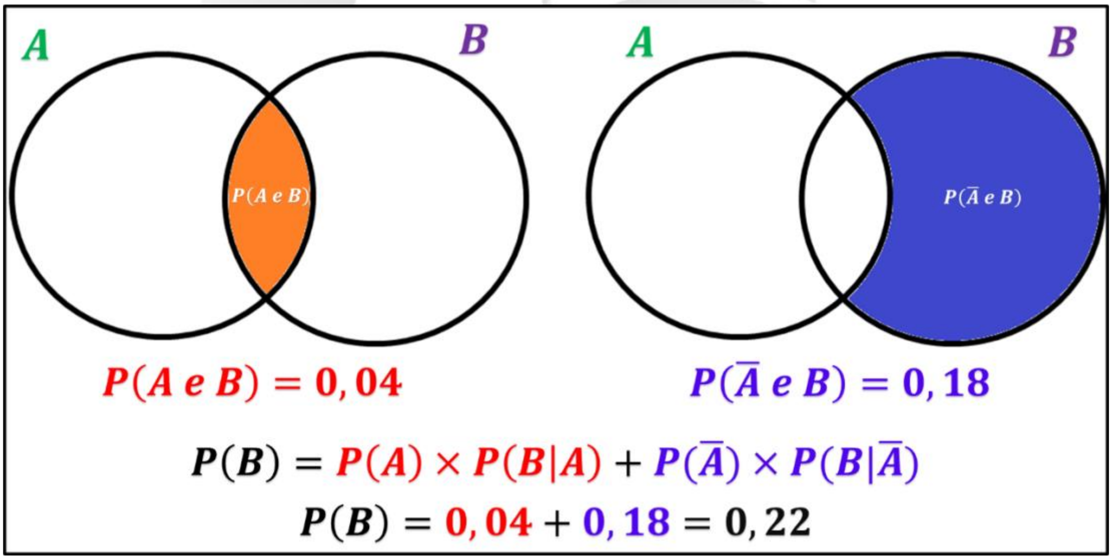


A outra área do diagrama B que precisamos calcular corresponde a diferença de B menos A (B-A). Nesse sentido, entenda que tudo que não está dentro do diagrama A, corresponde ao complementar de A, isto é, **não** A $(\bar{A})$. Assim, a área de B que não interseciona com A corresponde na interseção de B com **não** A.

Para calcular essa interseção, precisamos da probabilidade de não A. Como a probabilidade de A é 0,4, consequentemente o complementar para alcançar 1 é 0,6 [P($\bar{A}$)=0,6]. Além disso, é necessário a probabilidade de B dado que não a ocorreu. Esta informação também é fornecida na questão P(B|$\bar{A}$)=0,3. Portanto, a área da interseção de B com não A é igual a:



Com esses cálculos, podemos obter a probabilidade de B somando as duas áreas:



Por fim, a probabilidade de B é igual a 0,22, valor este maior que 0,2. Portanto, a questão está errada!

ALTERNATIVA ERRADA.

---

10 (CESPE|2015|DEPEN|AGENTE EXECUÇÃO PENAL)

As probabilidades dos eventos aleatórios A="o infrator é submetido a uma pena alternativa" e B ="o infrator reincide na delinquência" são representadas, respectivamente, por P(A) e P(B). Os eventos complementares de A e B são denominados, respectivamente, por $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Considerando que P(A)=0,4, e que as probabilidades condicionais P(B|$\bar{A}$)=0,3 e P(B|A)=0,1, julgue o item a seguir.

A e B são eventos dependentes.

( ) Certo ( ) Errado

Resolução

Podemos resolver essa questão apenas observando que existe probabilidade condicional P(B|A) com valor diferente da probabilidade somente da ocorrência de B, P(B). Na questão anterior (questão 09), já verificamos que P(B)=0,22. Logo, observa-se que a probabilidade B dado que A ocorreu é de 0,1. Isso quer dizer que existe uma dependência entre A e B, pois a ocorrência de A reduz as chances de B ocorrer. Lembre-se que, se A e B fossem eventos independentes, a P(B)=P(B|A), o que não ocorreu. Logo, a questão está correta, pois são eventos dependentes.

ALTERNATIVA CERTA: LETRA A.

11 (CESPE|2015|DEPEN|AGENTE EXECUÇÃO PENAL)

As probabilidades dos eventos aleatórios A="o infrator é submetido a uma pena alternativa" e B ="o infrator reincide na delinquência" são representadas, respectivamente, por P(A) e P(B). Os eventos complementares de A e B são denominados, respectivamente, por $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Considerando que P(A)=0,4, e que as probabilidades condicionais P(B|$\bar{A}$)=0,3 e P(B|A)=0,1, julgue o item a seguir.

P(A∪B)>0,6.

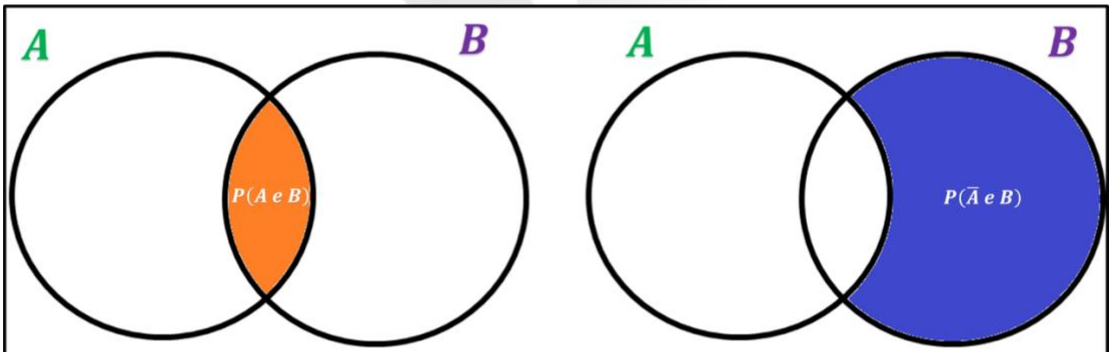
( ) Certo ( ) Errado

Resolução

Para obter a união de dois eventos A e B, utiliza-se o seguinte cálculo:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

A probabilidade é fornecida na questão, que é P(A)=0,4. A probabilidade de B foi calculada na Questão 09 pelo uso do Teorema da Probabilidade Total, e seu resultado foi de P(B)=0,22.



$$P(A\ e\ B) = 0,04 \qquad P(\bar{A}\ e\ B) = 0,18$$

$$P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(\bar{A}) \times P(B|\bar{A})$$

$$P(B) = 0,04 + 0,18 = 0,22$$

Em seguida, para obter o valor da interseção entre A e B, podemos multiplicar as seguintes probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$$

Por fim, a união dos eventos A e B será:

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,22 - 0,04 = 0,58$$

Logo, a questão é incorreta, pois a união é inferior a 0,6.

ALTERNATIVA ERRADA.

12 (VUNESP|2022|PC-RR|PERITO)

Suponha que, entre os que cumprem pena, 80% estão em regime fechado e 20% em regime aberto. Entre os que estão em regime fechado, 60% são homens e 40% são mulheres. Já entre os que estão em regime aberto, 30% são homens e 70% são mulheres. Se alguém que cumpre pena é homem, qual é a probabilidade de que esteja em regime fechado?

a) 3/5
b) 4/5
c) 5/6
d) 8/9
e) 1/9

Resolução

A questão solicita a probabilidade do criminoso está em regime fechado, sabendo que ele é homem, em outras palavras, P(F|H). Para resolver essa questão, podemos aplicar o Teorema de Bayes:

$$\boldsymbol{P(F|H) = \frac{P(F \cap H)}{P(H)} = \frac{P(F) \times P(H|F)}{P(H)}}$$

A probabilidade de ser regime fechado é 80%, P(F)=0,8. A probabilidade de ser homem sabendo que é regime fechado é de 60%, isto é, P(H|F)=0,6. Essas duas informações estão no enunciado da questão. Contudo, para obter a probabilidade do criminoso ser homem P(H), precisamos aplicar o Teorema da Probabilidade Total, isto é, considerar os homens em regime fechado e os homens em regime aberto. Veja:

$$\boldsymbol{P(H) = P(F) \times P(H|F) + P(A) \times P(H|A)}$$

Todas essas informações são fornecidas no enunciado, pois a probabilidade de ser regime aberto é de 20%, isto é, P(A)=0,2. Ainda, a probabilidade de ser homem em regime aberto é de 30%, isto é, P(H|A)=0,3. Assim, podemos aplicar o cálculo:

$$P(H) = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,3$$

$$P(H) = 0,48 + 0,06 = 0,54$$

Por fim, podemos aplicar o teorema de Bayes e chegar na resposta de interesse:

$$P(F|H) = \frac{P(F) \times P(H|F)}{P(H)}$$

$$P(F|H) = \frac{0,8 \times 0,6}{0,54} = \frac{0,48}{0,54} = \frac{8}{9}$$

ALTERNATIVA CERTA: LETRA D.

CONCURSEIRO QUE PRETENDE SER POLICIAL NÃO FAZ RATEIO