PROFISSÃO POLICIAL

Raciocínio Lógico

Professor Harisson Davi

Raciocínio Lógico
Professor Harisson Davi

Sumário

Progressões Aritméticas

1 DEFINIÇÃO

Chamamos de sequência numérica (ou progressão numérica) qualquer conjunto de números que tenha uma disposição ordenada finita ou infinita, sendo cada elemento denominado como um ***termo*** dessa sequência. Assim sendo, cada termo da progressão é identificado por sua posição na sequência.

Exemplos:

- A sequência $(a_n) = (1, 2, 3, 6, 5, 4)$ é uma progressão finita de seis termos onde, por exemplo, $a_2 = 2$ e $a_4 = 6$, ou seja, o segundo termo vale dois e o quarto vale seis.

- A sucessão $(b_n) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots)$ é uma sequência infinita que lista a raiz quadrada dos números naturais $(\mathbb{N})$. Essa progressão possui termos racionais e irracionais, onde o enésimo termo b_n vale $\sqrt{n}$.

Algumas sequências acabam recebendo uma atenção especial por possuírem certo padrão específico. Dentre essas sequências estudaremos as progressões aritmética e geométrica.

2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

Definindo $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$, ou seja, a diferença entre termos consecutivos de uma sequência, (a_n) é chamada de progressão aritmética se, e somente se, $\Delta a_n = r$, onde r é constante real para todo $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, a sequência $(b_n) = (3, 5, 7, 9, 11, \dots)$ é uma P.A. pois a diferença entre seus termos vale sempre 2, perceba:

$$\Rightarrow r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1}$$
$$\Rightarrow r = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = \cdots = 2$$

Essa constante r é chamada de ***razão*** da P.A. e define a sequência em relação ao seu tipo. Uma P.A. pode ser classificada em crescente ($r > 0$), decrescente ($r < 0$) e constante ($r = 0$).

Exemplos:

- A sequência $(-23, -19, -15, -11)$ é crescente, pois todo $a_n > a_{n-1}$, com $n \geq 2$, isso implica em $r > 0$.
- Analisando a progressão $(2\pi, \frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}, \dots)$ verificamos que essa é uma P.A. decrescente de razão igual a $-\frac{\pi}{2}$, ou seja, $r < 0$.
- Um exemplo de PA. constante é $(a_n) = (e, e, e, \dots)$ onde $r = 0$.

Podemos encontrar o ***termo geral*** de progressão aritmética em função do primeiro termo (a_1) e da razão.

2.1 Fórmula do Termo Geral

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Exemplos:

01 (INÉDITA – 2023)
Uma fábrica de motocicletas produziu 170 motos em janeiro de 2012 e querendo atingir uma certa meta produz 30 motos a mais por mês.

a) Quantas motocicletas a mesma fábrica irá produzir em setembro de 2012?

b) Quando a fábrica atingirá a meta de 500 motos no mês?

02 (IME/2008)
É dada uma PA de razão r. Sabe-se que o quadrado de qualquer número par x, $x > 2$, pode ser expresso como a soma dos n primeiros termos desta PA, onde $\boldsymbol{n}$ é igual à metade de x. O valor de r é

a) 2 b) 4 c) 8 d) 10 e) 16

Respostas:
1) a) 410; b) dezembro/2012;
2) c.

2.2 Relações Importantes

- Se três termos, a_1, a_2 e a_3, estão em PA vale que: $\boldsymbol{a_1 + a_3 = 2a_2}$.

Ex.: O valor de n que torna a sequência $2 + 3n, -5n$ e $1 - 4n$ uma progressão aritmética pertence ao intervalo:
a) $[-2, -1]$ b) $[-1, 0]$ c) $[0, 1]$ d) $[1, 2]$ e) $[2, 3]$

- Dado o termo de ordem j temos que:

$$\boldsymbol{a_n = a_j + (n - j).r}.$$

Ex.: Dada a sequência $(a_1, a_2, 7, a_4, \dots)$, uma PA., encontre o décimo termo (a_{10}), sabendo que a razão vale -5.

$$\Rightarrow a_n = a_j + (n - j).r \Rightarrow a_{10} = a_3 + (10 - 3).(-5)$$
$$\Rightarrow a_{10} = 7 + 7.(-5) = 7 - 35 = -28$$

- $\boldsymbol{m + n = 2k \Leftrightarrow a_m + a_n = 2a_k}$

Ex.: Considere uma sequência aritmética onde $a_{11} = 21$ e $a_{19} = 61$, encontre a_{15}.

$$\Rightarrow 11 + 19 = 2.15 \Leftrightarrow a_{11} + a_{19} = 2a_{15} \Leftrightarrow$$
$$\Rightarrow 2a_{15} = 21 + 61 \Rightarrow a_{15} = 41$$

- $\boldsymbol{m + n = j + k \Leftrightarrow a_m + a_n = a_j + a_k}$

Ex.: Encontre o quinto termo de uma P.A., sabendo que a soma do sétimo com o oitavo termo é 20 e $a_{10} = 5$.

$$\Rightarrow 5 + 10 = 7 + 8 \Leftrightarrow a_5 + a_{10} = a_7 + a_8$$
$$\Rightarrow a_5 = (a_7 + a_8) - a_{10}$$
$$\Rightarrow a_5 = 20 - 5 = 15$$

2.3 Interpolação Aritmética

Chamamos de interpolação aritmética o ato de inserir termos entre dois números de modo a transformar essa sequência numérica em uma P.A. de razão $r = \frac{a_n - a_1}{k+1}$, onde k é quantidade de meios que serão inseridos.

Ex.: Inserindo três meios aritmético entre 7 e 19, obtemos uma sequência cujo quarto termo é:

a) 3 b) 8 c) 10 d) 13 e) 16

✓ **Soma dos "n" primeiros termos de uma P.A.**

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Ex.: Encontre a soma dos 20 primeiros termos da P.A. $(2, 9, 16, \ldots)$.

$$\Rightarrow r = a_2 - a_1 = 9 - 2 = 7$$
$$\Rightarrow a_{20} = a_1 + (20 - 1).7 = 2 + 133 = 135$$
$$\Rightarrow S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}).20}{2} = (2 + 135).10 = 1.370$$

3 QUESTÕES DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1) Verifique quais das seguintes sequências são progressões aritméticas.

a) $(-17, -2, 13, 28)$
b) $(0, 1, 2, 4, 8, 16)$
c) $(k + 1, k - 1, k - 3, k - 5)$
d) $(3, -7, -10)$

---

2) Encontre a razão de cada uma das seguintes progressões aritméticas.

a) $\left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \dots\right)$
b) $(2, 0, -2, -4)$
c) $(3t, 3t + 2, 3t + 4, \dots)$

---

3) Determine o 17º termo da PA de razão 4 e com 1° termo 3.

4) Calcule o valor "v" de forma que a sequência $(4v - 1, 3v + 6, 6v + 1)$ seja uma progressão aritmética.

5) Determine três números positivos em P.A. decrescente cuja soma é 9 e o primeiro termo é 5.

6) Numa PA $a_{10} = 15$ e $a_{15} = 10$. Determine a razão, a_1 e S_{15}:

7) Ache o quinto termo da P.A. $(-2\ ;\ 5;\ \ldots)$**.**

8) Interpole 11 meios aritméticos entre 1 e 37.

9) Calcular a soma dos 20 primeiros termos de uma P.A. $(2, 5, 8, \ldots)$**.**

10) A soma dos 11 primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é 176. Se $a_{11} = a_1 + 30$ então, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ temos:

a) $a_n = 3n - 2$
b) $a_n = 2n - 3$
c) $a_n = n + 3$
d) $a_n = 2n + 3$
e) $a_n = 3n + 2$

11) Considerando a sequência $(k, 2k + 3, 6k, \ldots)$ uma P.A., encontre o primeiro termo, a razão e a diferença entre o sétimo e o terceiro.

12) Encontre a P.A., decrescente, de três termos cuja soma dos termos vale 15 e o produto 105.

13) Intercalar cinco meios aritméticos entre – 12 e 12.

14) Quantos meios aritméticos deve-se inserir entre -4 e 20 para que a razão seja 8?

15) Numa progressão aritmética (P.A.) de nove termos, a soma dos dois primeiros termos é igual a 20 e a soma do sétimo e oitavos termos é 140. A soma de todos os termos desta PA é

a) $S_n = 405$
b) $S_n = 435$
c) $S_n = 320$
d) $S_n = 395$
e) $S_n = 370$

---

16) O número mínimo de termos que deve ter a PA (73, 69, 65, ...) para que a soma de seus termos seja negativa é

a) 18
b) 19
c) 20
d) 37
e) 38

---

17) Em um treinamento de condicionamento físico, um soldado inicia seu primeiro dia correndo 800 m. No dia seguinte corre 850 m. No terceiro 900 m e assim sucessivamente até atingir a meta diária de 2.200 m. Ao final de quantos dias, ele terá alcançado a meta?

A) 31
B) 29
C) 27
D) 25
E) 23

18) O valor de x tal que $3^4 . 3^5 . 3^6 .... 3^x = 3^{30}$ e:

(A) 12
(B) 13
(C) 8
(D) 6
(E) 7

---

19) Quantos múltiplos de 9 ou 15 há entre 100 e 1000?

(A) 100
(B) 180
(C) 120
(D) 140
(E) 160

---

20) Numa P.A., o 10° termo e a soma dos 30 primeiros termos valem, respectivamente, 26 e 1440. A razão dessa progressão é

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 6.
e) 265

---

21) Se $(x+3, 2x-1, x+5)$ é uma P.A., então a soma dos três termos dessa P.A. é

a. – 1
b. 15
c. 19
d. 27

4 GABARITO

1. (a) e (c).
2. a) -1/2; b) -2; c) 2
3. 67.
4. V=3
5. $(5, 3, 1)$
6. $r = -1$; $a_1 = 24$; $S_{15} = 255$
7. 26
8. $(a_n) = (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37)$
9. 610
10. a
11. $a_1 = 2$; $r = 5$; $a_7 - a_3 = 20$.
12. $(7, 5, 3)$
13. $(-12, -8, -4, 0, 4, 8, 12)$
14. 2
15. a
16. e
17. b
18. c
19. d
20. c
21. d

CONCURSEIRO QUE PRETENDE SER POLICIAL NÃO FAZ RATEIO